УПРАВЛІННЯ ОСВІТИ І НАУКИ
ПОЛТАВСЬКОЇ ОБЛДЕРЖАДМІНІСТРАЦІЇ

ПОЛТАВСЬКИЙ ОБЛАСНИЙ ІНСТИТУТ ПІСЛЯДИПЛОМНОЇ
ПЕДАГОГІЧНОЇ ОСВІТИ ім. М.В. ОСТРОГРАДСЬКОГО

ГЕОМЕТРІЯ 7–11(12)

навчальний посібник
для інтенсивного вивчення
програмового матеріалу

Полтава 2008

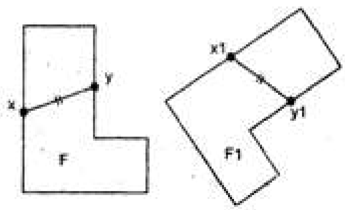
$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2},$$

$$tg120^\circ = tg(180^\circ - 60^\circ) = -tg60^\circ = -\sqrt{3},$$

$$ctg120^\circ = ctg(180^\circ - 60^\circ) = -ctg60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

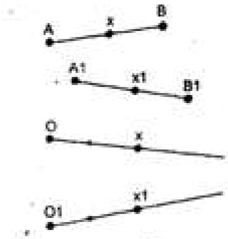
Рух (на площині)



1. ***Означення руху***

Перетворення однієї фігури в іншу називається рухом, якщо воно зберігає відстані між точками.

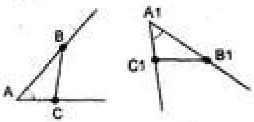
$$\boxed{xy = x_1y_1}$$



2. *Властивості руху*

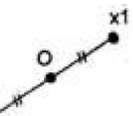
а) Точки, що лежать на прямій, під час руху переходять у точки, які лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розміщення.

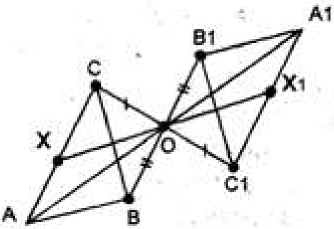
б) Під час руху прямі переходять у прямі, півпрямі у півпрямі, відрізки у відрізки.



в) Під час руху зберігаються кути між прямими.

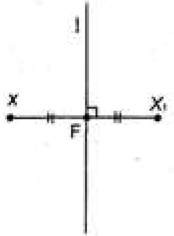
3. *Перетворення симетрії відносно точки*

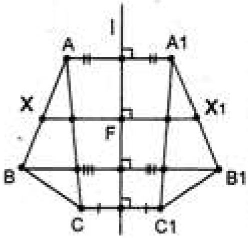




Перетворення фігури F у фігуру F_1, при якому кожна її точка X переходить у точку X_1, симетричну відносно даної точки O, називається перетворенням симетрії відносно точки O.

$$AO = A_1O,\ BO = B_1O,\ CO = C_1O,\ XO = X_1O.$$

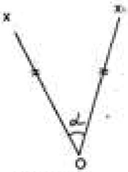




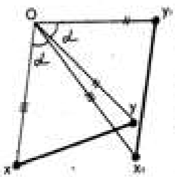
4. *Перетворення симетрії відносно прямої*

Перетворення фігури F у фігуру F_1 , при якому кожна її точка X переходить у точку X_1, симетричну відносно даної прямої *l*, називається перетворенням симетрії відносно прямої *l*.

$\boxed{XX_1 \perp l, XF = X_1F}$.



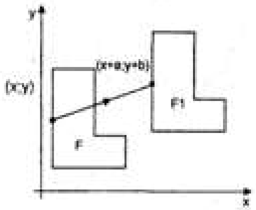
OX=OX$_1$



5. *Поворот*

Поворотом площини навколо даної точки називається такий рух, при якому кожний промінь, що виходить з даної точки, повертається на один і той самий кут в одному і тому самому напрямі.

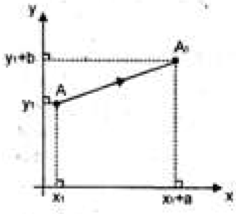
$\angle XOX_1 = \angle YOY_1, OX = OX_1, OY = OY_1$



6. *Паралельне перенесення і його властивості*

Означення. Перетворення фігури F, при якому довільна її точка $(x;y)$ переходить у точку $(x+a;y+b)$, де a і b одні і ті самі для всіх точок $(x;y)$, називається паралельним перенесенням.

$\boxed{x' = x + a, y' = y + b}$



Властивості.

а) Паралельне перенесення є рух.

б) При паралельному перенесенні точки зміщуються вздовж паралельних прямих (або прямих які збігаються) на одну і ту саму відстань.

в) При паралельному перенесенні пряма переходить у паралельну пряму (або в себе).

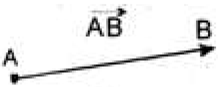
г) Які б не були дві точки A і A_1, існує одне і до того єдине паралельне перенесення, при якому точка A переходить в точку A_1.

7. *Рівність фігур*

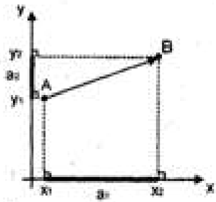
Дві фігури називаються рівними, якщо вони переводяться рухом одна в одну.

Вектори (на площині)

1. *Означення вектора*



Вектором називається напрямлений відрізок.
Точка A – початок вектора, точка B – кінець вектора.



2. *Координати вектора*

$A(x_1;y_1)$ – початок вектора

$B(x_2;y_2)$ – кінець вектора

$\overline{AB}(x_2-x_1;y_2-y_1)$,

$\boxed{a_1 = x_2 - x_1; a_2 = y_2 - y_1}$

$\overline{AB}(a_1;a_2)$ - координати вектора ,

a_1 і a_2 - проекції вектора $\vec{a}$ на вісі Ох і Оу.

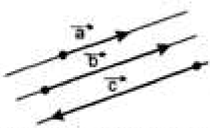
3. *Модуль вектора*

Модулем (абсолютною величиною) вектора називається довжина відрізка, що зображає вектор.

Модуль вектора $\vec{a}$ позначається $|\vec{a}|$.

$$\boxed{|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}} \qquad \boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

4. *Рівні вектори*

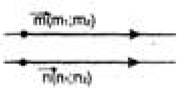


$\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ – однаково направлені вектори,

$\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{c}$ – протилежно направлені вектори,

Два вектори називаються рівними, якщо вони суміщаються паралельним перенесенням. Рівні вектори однаково напрямлені і рівні за абсолютною величиною.

Якщо вектори однаково направлені і рівні за абсолютною величиною, то вони рівні . Рівні вектори мають рівні відповідні координати.



$$\boxed{\begin{matrix} \vec{m} = \vec{n} \\ m_1 = n_1 \\ m_2 = n_2 \end{matrix}}$$

Якщо у векторів відповідні координати рівні, то вони рівні.

5. *Нульові вектори. Одиничні вектори*

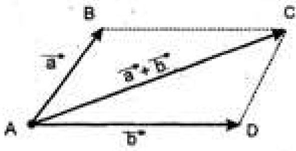
Нульовим вектором називається вектор у якого початок збігається з його кінцем.

Позначення нульового вектора $\vec{0}$ $\quad \boxed{|\vec{0}| = 0}$

Про напрям нульового вектора не говорять.

Одиничним вектором називається вектор, довжина якого дорівнює одиниці.

6. *Додавання векторів*

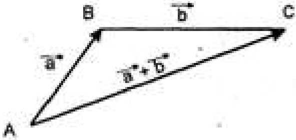


Правило паралелограма

Від довільної точки відкласти вектори, які дорівнюють векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$, добудувати паралелограм.

$\overrightarrow{AC}$ – діагональ паралелограма, сума векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

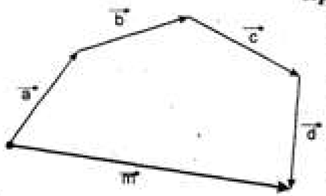
$$\boxed{\vec{a}(a_1, a_2); \vec{b}(b_1, b_2), \ \ \vec{a}+\vec{b}(a_1+b_1; a_2+b_2)}$$



Правило трикутника

Від довільної точки відкласти вектор, який дорівнює вектору $\vec{a}$, і від його кінця відкласти вектор, який дорівнює вектору $\vec{b}$. Вектор, початок якого збігається з початком першого з відкладених векторів, а кінець – з кінцем другого, дорівнює вектору $\vec{a}+\vec{b}$.

$\vec{a}(a_1, a_2); \vec{b}(b_1, b_2), \ \ \vec{a}+\vec{b}(a_1+b_1; a_2+b_2)$

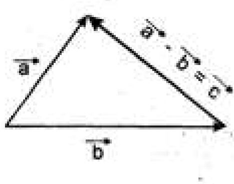


Правило многокутника

Якщо вектори відкладено так, що початок другого вектора збігається з кінцем першого, початок третього – з кінцем другого і т.д., то сума дорівнює вектору, початок якого збігається з початком першого, а кінець – з кінцем останнього вектора.

$\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$

Кожна координата суми кількох векторів дорівнює сумі відповідних координат доданків.



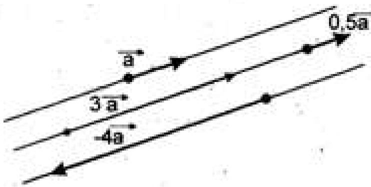
7. *Віднімання векторів*

Від довільної точки відкласти вектори, які дорівнюють векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$. З'єднати кінці векторів. Напрям вектора різниці *від від'ємника до зменшуваного.*

$\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}, \ \ \vec{c}+\vec{b}=\vec{a}.$

$\vec{a}(a_1, a_2); \vec{b}(b_1, b_2), \ \ \vec{a}-\vec{b}(a_1-b_1; a_2-b_2)$

Кожна координата різниці двох векторів дорівнює різниці відповідних координат цих векторів.



8. *Множення вектора на число. Колінеарні вектори.*

Добутком вектора $\vec{a}(a_1, a_2)$ на число λ називається вектор $\lambda\vec{a}(\lambda a_1, \lambda a_2)$.

Колінеарними векторами називаються два відмінних від нуля вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

У ***колінеарних*** векторів відповідні координати ***пропорційні***. І навпаки, якщо у двох ненульових векторів відповідні координати пропорційні, то вектори $\vec{a}(a_1, a_2); \vec{b}(b_1, b_2)$, $\boxed{\vec{a} \parallel \vec{b},}$. $\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}}$ колінеарні.

$\lambda > 0 \;\; \vec{a} \uparrow\uparrow \lambda\vec{a}$

$\lambda < 0 \;\; \vec{a} \uparrow\downarrow \lambda\vec{a}$

$\lambda < -1, \;\; \vec{a} \uparrow\downarrow \lambda\vec{a}, \;\; |\vec{a}| < |\lambda\vec{a}|$

$-1 < \lambda < 0, \;\; \vec{a} \uparrow\downarrow \lambda\vec{a}, \;\; |\vec{a}| > |\lambda\vec{a}|$

$0 < \lambda < 1, \;\; \vec{a} \uparrow\uparrow \lambda\vec{a}, \;\; |\vec{a}| < |\lambda\vec{a}|$

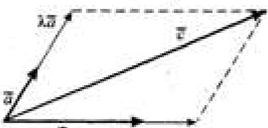
$\lambda > 1, \;\; \vec{a} \uparrow\uparrow \lambda\vec{a}, \;\; |\vec{a}| < |\lambda\vec{a}|$

9. Розкладання вектора за двома неколінеарними векторами

Будь-який вектор С можна записати у вигляді:

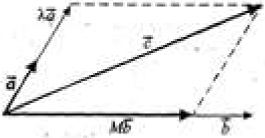
$$\boxed{\vec{C} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}}$$

де $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відмінні від нуля неколінеарні вектори.

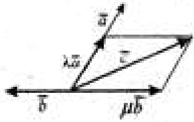


$\lambda > 1, \quad \mu > 1$

$0 < \lambda < 1, \quad O < \mu < 1$



$\lambda > 1, \quad 0 < \mu < 1$

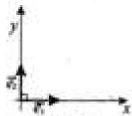


$0 < \lambda < 1, \quad \mu < -1$

Завдання: *Інші можливі випадки розглянь самостійно.*

10. Координатні вектори або орти

Координатними векторами або *ортами* називаються одиничні вектори, які мають напрями додатних координатних півосей.

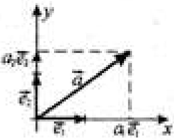


$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$

$\vec{e}_1(1;0),\ \ \vec{e}_2(0;1),\ |\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$

Для будь-якого вектора $\vec{a}\ (a_1; a_2)$

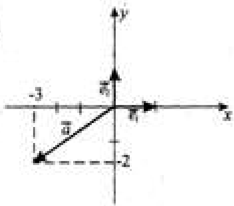
маємо: $\boxed{\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2}$



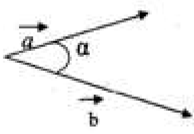
Наприклад:

$\vec{a}(-3;-2)$

$\vec{a} = -3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$



11. Скалярний добуток векторів



$\vec{a}(a_1; a_2),\ \vec{b}(b_1; b_2)$

Означення $\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

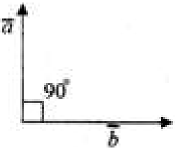
Теорема $\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}; \quad \cos\alpha = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$

Скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків відповідних координат цих векторів

12. Перпендикулярність векторів



Коли *вектори перпендикулярні*, то їх скалярний добуток дорівнює *нулю*.
Якщо скалярний добуток відмінних від нуля векторів дорівнює *нулю*, то вектори *перпендикулярні*.
Якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ і навпаки, якщо $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$

13. Основні закони додавання векторів

а) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (*переставний*)

б) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (*сполучний*);

в) $\vec{a}+\vec{o}=\vec{a}$ (*закон поглинання нульового вектора*)

14. Основні закони множення вектора на число

а) $(xy)\cdot\vec{a}=x\cdot(y\vec{a})$ (*сполучний*);

б) $x\vec{a}+y\vec{a}=(x+y)\vec{a}$ (*перший розподільний*);

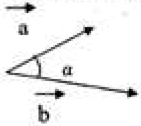
в) $x\vec{a}+x\vec{b}=x(\vec{a}+\vec{b})$ (*другий розподільний*);

г) $x\cdot\vec{o}=\vec{o}$; $o\cdot\vec{a}=0$ (*поглинання нуля і нульового вектора*)

15. Скалярний квадрат вектора

$$\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0^\circ=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|=|\vec{a}|^2 \quad (\cos 0^\circ = 1)$$

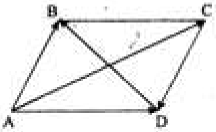
Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини $\boxed{\vec{a}^2=|\vec{a}|^2}$



а) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

б) $(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=|\vec{a}|^2\pm 2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha+|\vec{b}|^2$

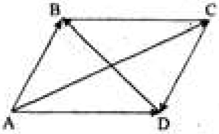
Виконуємо перетворення за тими самими правилами, що і в числових виразах.



$$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$$
$$\overrightarrow{DB}=\vec{a}-\vec{b}$$

Задача.

Доведіть, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.



Доведення:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ *за правилом паралелограма*

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$ *за правилом віднімання векторів*

$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)^2=\overrightarrow{AC}^2,\quad \overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2=\overrightarrow{AC}^2$

$\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)^2=\overrightarrow{DB}^2,\quad \overrightarrow{AB}^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2=\overrightarrow{DB}^2$

Додамо почленно ці рівності.

аємо $2\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AD}^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{DB}^2$

$\overrightarrow{AB}^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=AB^2$ – *квадрат сторони паралелограма,*

аналогічно $\overrightarrow{AD}^2=AD^2, \overrightarrow{AC}^2=AC^2, \overrightarrow{DB}^2=DB^2$

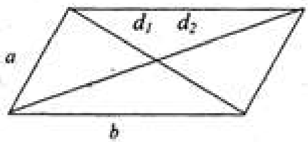
У паралелограмі протилежні сторони рівні.

AB = CD, BC = AD. Маємо

$AB^2+BC^2+CD^2+AD^2=AC^2+BD^2$, або

$2(AB^2+BC^2)=AC^2+BD^2$

Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін



$$\boxed{d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2)}$$

Подібність фігур

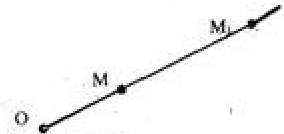
Вам знайомі перетворення фігур, при яких відстань між будь-якими двома точками A і B дорівнює відстані між відповідними їм точками A^1 і B^1. Такі перетворення називаються ***рухами***. ***При рухах*** відповідні ***фігури рівні***.

Існують і такі перетворення фігур, при яких ***відстань*** між точками, рівність відповідних фігур ***не зберігається***, але ***зберігається*** відношення між відрізками, форма фігури, упорядкованість точок прямої, величина кута. Такі перетворення називаються ***подібними перетвореннями***, окремим випадком яких є ***гомотетія***.

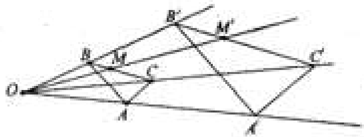
1. *Гомотетія*

Означення. *Гомотетією* з центром O і коефіцієнтом $k \neq 0$ називається таке перетворення фігур, при якому будь-яка точка M переходить у таку точку M^1, що $OM^1 = k \cdot OM$.

Точка M^1 називається *образом* точки M,
точка M – *прообразом* точки M^1,
число k – *коефіцієнтом* гомотетії,
точка O – *центром* гомотетії.
Точки M і M^1 називаються гомотетичними.



$\boxed{OM' = k \cdot OM}$

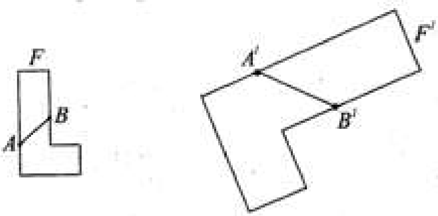


$\boxed{OA^1 = kOA; OB^1 = k \cdot OB; OC^1 = kOC}$

$\boxed{k > 0}$ $\boxed{k < 0}$

$\overrightarrow{OM}_1 \uparrow\uparrow \overrightarrow{OM}$ $\overrightarrow{OM}_1 \uparrow\downarrow \overrightarrow{OM}$

2. *Перетворення подібності*



Перетворення фігури F у фігуру F^1 називається перетворенням подібності, якщо при цьому перетворенні відстані між точками змінюються в одну й ту саму кількість разів. $\boxed{A^1B^1 = k \cdot AB}$

k – коефіцієнт подібності

3. Властивості перетворення подібності

а) якщо k = 1, то перетворення подібності обертається в рух. Тобто рух - окремий випадок перетворення подібності;

б) перетворення подібності переводить прямі у прямі, півпрямі у півпрямі, відрізки у відрізки;

в) перетворення подібності зберігає кути між півпрямими;

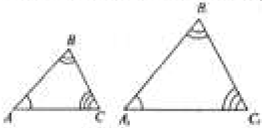
г) коли фігура F_1 подібна фігурі F_2, а фігура F_2 подібна фігурі F_3, то фігури F_1 і F_3 – подібні.

Коли $F_1 \sim F_2$ $\quad F_2 \sim F_3$ $\quad F_1 \sim F_3$

д) будь-яке перетворення подібності має обернене перетворення, яке є також перетворенням подібності з коефіцієнтом $\frac{1}{k}$.

Якщо $A^IB^I = k \cdot AB$, то $AB = \frac{1}{k} A^IB^I$.

4. Означення подібних трикутників

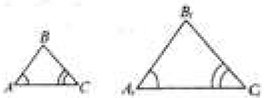


Трикутники називаються *подібними*, якщо відповідні *кути рівні*, а *сторони пропорційні*.

$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1,$

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k$$

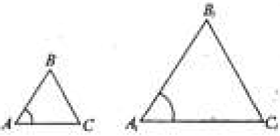
5. Ознаки подібності трикутників за двома кутами



Якщо $\angle A_1 = \angle A,\ \ \angle C_1 = \angle C$, *то* $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$

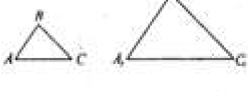
Якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам другого трикутника, то такі трикутники подібні

за двома сторонами і кутом між ними.



Якщо $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = k,\ \ \angle A_1 = \angle A$, *то* $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$

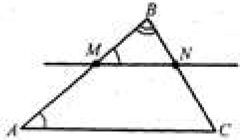
Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого трикутника і кути, утворені цими сторонами, рівні, то трикутники подібні *за трьома сторонами*



Якщо $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k$, *то* $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$

Якщо сторони одного трикутника пропорційні сторонам другого, то такі трикутники подібні.

6. Пряма, паралельна стороні трикутника, і подібність трикутників



$MN \parallel AC$

$\Delta ABC \sim \Delta MBN$ за двома кутами

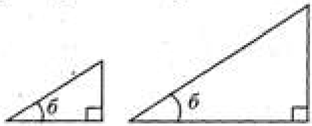
$\angle B$ – спільний

$\angle A = \angle M$ як відповідні при $MN \parallel AC$ і січній AB

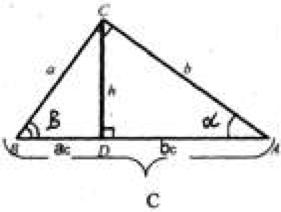
7. Ознака подібності прямокутних трикутників

У прямокутних трикутників один із кутів прямий. Тому, за ознакою подібності трикутників за двома кутами маємо:

Два прямокутні трикутники подібні, якщо у них є по рівному гострому куту.



8. Співвідношення між елементами прямокутного трикутника (середнє геометричне або середнє пропорційне)



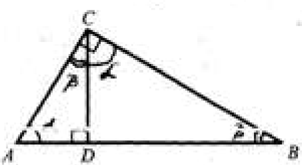
$BC = a$, $AC = b$, $AB = C$,
$BD = a_c$; $AD = b_c$, $CD = h$.
a і b – катети прямокутного трикутника,
c – гіпотенуза прямокутного трикутника,
a_c – проекція катета a на гіпотенузу c,
b_c - проекція катета b на гіпотенузу c,
h – висота трикутника, опущена з вершини прямого кута на гіпотенузу.

Катет прямокутного трикутника є середнім пропорційним (середнім геометричним) між гіпотенузою і проекцією цього катета на гіпотенузу.

$$\boxed{a = \sqrt{c \cdot a_c}} \qquad \boxed{b = \sqrt{c \cdot b_c}}$$

Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута на гіпотенузу, є середнім пропорційним між проекціями катетів на гіпотенузу.

$$\boxed{h = \sqrt{a_c \cdot b_c}}$$

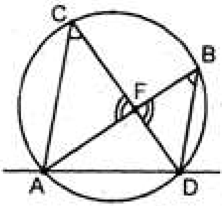


$\overset{\alpha\,\beta\,90^\circ}{\Delta ABC} \sim \overset{\alpha\,\beta\,90^\circ}{\Delta ACD}$ *за двома кутами*

1) $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{AD}$, $\quad AC^2 = AD \cdot AB$

$$\boxed{AC = \sqrt{AD \cdot AB}}$$

11. Пропорційність відрізків хорд



Якщо хорди AB і CD кола перетинаються в точці F, то:

$$\boxed{AF \cdot BF = CF \cdot DF}$$

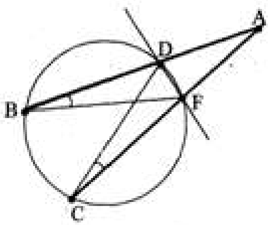
<u>Пропорція</u>

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

<u>Властивість пропорції</u>

$$\boxed{\mathbf{ad = bc}}$$

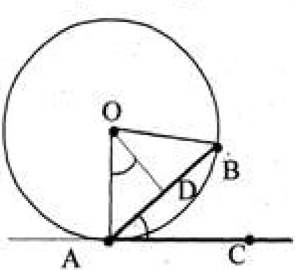
12. Пропорціональність відрізків січних кола



Якщо з точки A до кола проведено дві січні, що перетинають коло відповідно в точках B, C, D, F, то:

$$\boxed{AD \cdot AB = AF \cdot AC}$$

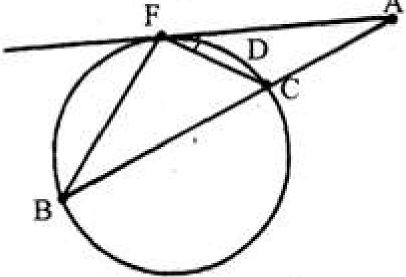
13. Кут між хордою кола і дотичною до кола в кінці хорди.



Гострий кут між хордою кола і дотичною до кола в кінці хорди дорівнює половині кута між радіусами, проведеними до кінців хорди або вимірюється половиною градусної міри дуги, на яку опирається хорда.

$\angle BAC = \frac{1}{2}\angle AOB = \angle AOD$ або $\angle BAC$ вимірюється половиною градусної міри дуги AB.

14. Пропорційність відрізків січної і дотичної до кола



Якщо з точки A до кола проведено січну, що перетинає коло відповідно в точках B і C і дотичну, що має з колом спільну точку F, то:

$$\boxed{AC \cdot AB = AF^2}$$